

KUTATÁSI ZÁRÓJELENTÉS

Kvázilokális megfigyelhető mennyiségek és az általános relativitáselmélet kanonikus szerkezete T 042531

A jelen pályázat keretében végzett kutatásaink az előző, a T 016246 és T 030374 számú projektjeinkben elkezdett ill. folytatott kutatásaink szerves folytatását képezték. A itt felvázolt hosszabb távú kutatási program a K 67790 számú, 2007–2011 futamidejű OTKA pályázatunk keretében folytatódik.

A konkrét kutatási tervben négy nagyobb, de egymással szorosan összefüggő problémakört, mint kutatási területet jelöltünk meg:

1. A kvázilokális megfigyelhető mennyiségek, különösen az impulzusmomentum szerepének a vizsgálata és e mennyiségek kapcsolata az elmélet (kvázilokális) Hamilton formalizmusával;
2. A gravitációs és anyagi sugárzási módusok kvázilokális értelmezése és jellemzése;
3. A Chern–Simons funkcionál szerepének a vizsgálata az Einstein elmélet kanonikus formalizmusában;
4. A felmerülő ill. kapcsolódó matematikai, geometriai problémák tisztázása.

Így célszerűnek látszik ennek megfelelően csoportosítani a projekt keretében elért kutatási eredményeinket is.

Kutatási eredmények:

1. Kvázilokális megfigyelhető/megmaradó mennyiségek az általános relativitáselméletben

•

Az [1] publikáció a Max Planck Society által megjelentetett “Living Reviews in Relativity” c. elektronikus folyóirat felkérésére az általános relativitáselmélet kvázilokális megmaradó és megfigyelhető mennyiségeiről és azok alkalmazásairól írt kritikai összefoglaló. Ebben áttekintjük a megfigyelhető mennyiségek bevezetésének az általános kereteit, diszkutáljuk a nehézségek gyökerét és bemutatjuk a szükséges matematikai technikákat és eszközöket. Egységes szempontok szerint részletesen diszkutáljuk az irodalomban eddig megjelent kvázilokális energiaimpulzus és impulzusmomentum kifejezéseket, azok alkalmazhatóságát és az esetleges nehézségeket. A témakör teljes áttekintésén túl a dolgozat számos új, az irodalomban nem publikált eredményt, észrevételt is tartalmaz. Bibliográfiája csaknem teljesen mondható.

A dolgozattal kapcsolatos szerkesztői elvárás annak az adott tárgykörben megjelent új eredményekkel való folyamatos, de legalább két évente történő frissítése. (A dolgozat ettől “living”.) Utolsó frissítése 2005-ben volt. A megjelenése óta eltelt 3 évben több mint 80 független hivatkozást kapott.

•

Természetes elvárás, hogy minden értelmes *gravitációs* energiaimpulzus és impulzusmomentum kifejezés (a gravitációmentes viszonyokat reprezentáló) Minkowski téridőben zérus értéket adjon.

A [2] dolgozatban megmutattuk, hogy a M. Liu és S.-T. Yau által javasolt kifejezés *pozitív* gravitációs energiád ad bizonyos Minkowski téridőbeli zárt felületekre. Hasonlóan, a Minkowski téridőben bizonyos gömbszimmetrikus felületekre a Brown–York energia (és ennek további három módosítása) lehet szigorúan *negatív* is. Így e kifejezések fizikai jelentősége megkérdőjelezhető.

•

A fizika nevezetes megmaradó mennyiségei általában az adott diszciplína kanonikus, hamiltoni megfogalmazásában is bevezethetők. Ismert, hogy aszimptotikusan sík téridőkben a *teljes* téridőhöz rendelt teljes energiaimpulzus és impulzusmomentum is bevezethető az Einstein elmélet kanonikus megfogalmazásában mint a “korrekt” Hamilton függvény értéke megfelelő generátorok választása mellett (lásd még a következő két pontot). Így természetes igény, hogy a téridő véges, de kiterjedt tartományaihoz rendelt *kvázilokális* mennyiségek is rendelkezzenek ilyen hamiltoni interpretációval.

[3]-ban a vakuum általános relativitáselmélet kanonikus formalizmusában a kvázilokálisan a kanonikus változókra kirovandó peremfeltételeket vizsgáltuk. Megmutattuk, hogy a 2 dimenziós felületelem rögzítése, mint peremfeltétel már biztosítja a kényszerek és az alap Hamilton függvények kanonikus változók szerinti funkcionálderiválhatóságát és Poisson algebrává záródását. Az evolúciós egyenletek e peremfeltételeket

megőrzik, s az alap Hamilton függvény értéke jól definiált, Lorentz kovariáns és gauge invariáns megfigyelhető mennyiséget definiál. A térszerű végtelenben aszimptotikusan sík téridőkben e megfigyelhető mennyiségek a teljes térbeli impulzusmomentumra, ill. mind a stacionárius mind a tengelyszimmetrikus téridőkben a jól ismert standard kifejezésekre redukálódnak.

E cikk bekerült a Classical and Quantum Gravity folyóirat “Research highlights from 2005 and 2006” válogatásába.

•

A [4] dolgozatban a térszerű végtelenben aszimptotikusan sík téridők kanonikus szerkezetének a vizsgálata során megmutattuk, hogy az Einstein elmélet Beig–Ó Murchadha Hamilton függvényével definiált tömegközéppont *nem* megmaradó, és a térbeli impulzusmomentummal együtt *nem* alkot az elvárt relativisztikus transzformációs tulajdonságokkal rendelkező antiszimmetrikus Lorentz tenzort. Ezt korrigálandó olyan tömegközéppont kifejezést javasoltunk, ami már megmaradó és a téridőbeli aszimptotikus Poincaré transzformációk során a korrekt módon transzformálódik.

[5]-ben tovább vizsgáltuk a [4]-ben talált megmaradó tömegközéppont-kifejezést. Megmutattuk, hogy aszimptotikus Poincaré transzformációk során e tömegközéppont a térbeli impulzusmomentummal együtt épp a korrekt módon transzformálódik nem csak a téridőben, hanem a gravitációs fázistérben is.

[5] a “Mathematical Relativity: New Ideas and Developments” c. 319. WE-Heraeus Szemináriumon (Bad Honnef, Németország, 2004. márc. 1–5) tartott meghívott plenáris előadásunk anyaga.

•

A gravitációs sugárzás által a lokalizált forrásból elvitt impulzusmomentum számolásához az impulzusmomentum kifejezésnek jól definiálnak kell lenni az aszimptotikusan sík téridő *fényszerű* végtelenjében is; továbbá a *különböző* retardált időpillanatokban “mért” impulzusmomentumok összehasonlíthatók kell legyenek. Sajnos az irodalomban megtalálható “klasszikus” impulzusmomentum-kifejezés nem jól definiált (“gauge”-függő) és az általa a különböző retardált időpillanatokhoz rendelt impulzusmomentumok természetes módon *nem* hasonlíthatók össze (“szupertranszlációs ambiguitás”).

Az impulzusmomentum fényyszerű végtelenben való értelmezésének az alapja lehet a már fent bemutatott kvázilokális hamiltoni analízis. Bár stacionárius téridőkben a fenti kvázilokális kifejezés fényyszerű végtelenbeli limesze a standard impulzusmomentumot adja, kimenő gravitációs sugárzás jelenlétében az még egy határozatlan függvényt tartalmaz.

A [6] publikációban megmutattuk, hogy az aszimptotikusan sík téridők sugárzási tartományában a nagy gömbökön értelmezett Dirac operátor sajátspinorai hogyan használhatók fel a fenti ambiguitások kiküszöbölésére, és a kvázilokális hamiltoni analízis által specifikálatlanul hagyott függvény rögzítésére. Konkrétan, megmutattuk, hogy a metrikus gömbön a Dirac operátor legkisebb sajátértékéhez tartozó sajátspinorokból felépülő három lineárisan független vektormező épp a gömb három forgás-Killing vektora, ami lehetővé teszi aszimptotikusan sík téridő sugárzási tartományaiban a gravitációs impulzusmomentum egy gauge invariáns bevezetését, és a gravitációs sugárzás által a rendszerből elvitt impulzusmomentum számolását.

- [1] L. B. Szabados, Quasi-local energy-momentum and angular momentum in GR: A review article, Living Rev. Relativity, **7** (2004) 4, pp. 1–135, [Online Article] <http://www.livingreviews.org/lrr-2004-4>
- [2] N. Ó Murchadha, L. B. Szabados, K. P. Tod, A Comment on positivity of quasilocal mass, Phys. Rev. Lett. **92** 259001 (2004), arXiv: gr-qc/0311006
- [3] L. B. Szabados, On a class of 2-surface observables in general relativity, Class. Quantum Grav. **23** 2291–2302 (2006), arXiv: gr-qc/0511059
- [4] L. B. Szabados, On the roots of the Poincaré structure of asymptotically flat spacetimes, Class. Quantum Grav. **20** 2627–2661 (2003), arXiv: gr-qc/0302033
- [5] L. B. Szabados, The Poincaré structure and the centre-of-mass of asymptotically flat spacetimes, in *Analytical and Numerical Approaches to Mathematical Relativity*, The proceedings of the invited talks at the 319th WE-Heraeus Seminar on Mathematical Relativity, March 1–5, 2004, Bad Honnef, Germany, pp. 157–184, Ed.: J. Frauendiener, D. J. W. Giulini and V. Perlick, Lecture Notes in Physics, No 692, Springer Berlin/Heidelberg 2006, URL: http://dx.doi.org/10.1007/11550259_8
- [6] L. B. Szabados, Total angular momentum from Dirac eigenspinors, Class. Quantum Grav. **25** 025007–1–25 (2008), arXiv: arXiv:0709.1072

2. A gravitációs és anyagi sugárzási módusok kvázilokális értelmezése és jellemzése

't Hooft ún. holografikus hipotézise szerint egy zárt 2 dimenziós felülettel körülzárt rendszer állapotát kell tudnunk jellemezni a kizárólag a felületen értelmezett szabadsági fokok segítségével, és a felületen az információsűrűség nem lehet nagyobb mint 1 bit/Planck-felszín.

A [7] dolgozatban a holografikus hipotézis egy új matematikai megfogalmazását javasoltuk, és megmutattuk, hogy ezen új alak klasszikus fizikai verziója Minkowski téridőben bizonyítható. Konkrétan, megmutattuk, hogy (kompakt, félegyszerű gauge csoportok esetén) a zero kvázilokális tömegű Yang–Mills és Higgs terek rendre pontosan a (tisztá sugárzást leíró) pp -hullám ill. síkhullámmegoldások. Olyan teljesen szimmetrikus $2s$ indexű tenzormezőt és belőle felépülő kvázilokális megfigyelhető mennyiséget konstruáltunk, amellyel tetszőleges s spinű lineáris, zero nyugalmi tömegű spinormezők (pl. a Minkowski téridő gravitációs perturbációi) zero ill. pp -hullám jellege egyértelműen jellemezhető. Megmutattuk, hogy a fenti mezők pp -hullám konfigurációi egyértelműen jellemezhetők 2-felületi adatok segítségével is. Bebizonyítottuk, hogy e konfigurációk az összes spinormező terében sűrű alteret határoznak meg.

E cikkünk “annak újszerűsége, jelentősége és a jövőbeni kutatásokra gyakorolt potenciális hatása miatt” bekerült az IOP Publishing és az Institute of Physics ún. “IOP Select”, és a Classical and Quantum Gravity folyóirat “Research highlights from 2004 and 2005” válogatásába.

- [7] L. B. Szabados, Quasi-local holography and quasi-local mass of classical fields in Minkowski spacetime, Class. Quantum Grav. **22** 855–878 (2005), arXiv: gr-qc/0411148

3. A Chern–Simons funkcionál szerepének a vizsgálata az Einstein elmélet kanonikus formalizmusában

Egy korábbi dolgozatunkban megmutattuk, hogy a vákuum Einstein elmélet időfejlődését generáló ún. hamiltoni kényszer egyszerű Poisson zárójela a három dimenziós tér térfogatának és a gravitációs változokból felépülő Chern–Simons funkcionálnak.

A [8] dolgozatban ezt az eredményt terjesztettük ki a csatolt Einstein–Yang–Mills–Higgs rendszerekre kozmológiai állandó jelenlétében. Konkrétan, megmutattuk, hogy a fázistérben az időfejlődését generáló hamiltoni kényszer egyszerű Poisson zárójela a három dimenziós tér térfogatának és egy olyan dimenziótlan függvénynek, ami az anyagmezők energiasűrűségének és a gravitációs változokból felépülő Chern–Simons funkcionálnak egy kifejezése. E kifejezés egy következménye, hogy a gravitáció kanonikus kvantumelméletében bevezetett térfogatoperátor sajátállapotai nem feltétlenül fizikai állapotok.

- [8] L. B. Szabados, A note on the Hamiltonian constraint in canonical GR, arXiv:0711.4009 [gr-qc]

4. A felmerülő ill. kapcsolódó matematikai, geometriai problémák tisztázása

Az általános relativitáselmélet ún. tetrádformalizmusában csak akkor vezethetők be egy adott zárt, irányítható térszerű \mathcal{S} felülethez rendelt szokásos megmaradó mennyiségek, ha bizonyos globális topológiai feltételek teljesednek. Nevezetesen, ha az ortonormált Lorentz- és a spin bázis nyaláb globálisan trivializálható az \mathcal{S} felületre való visszahúzása után; továbbá az \mathcal{S} felületen bizonyos gauge feltételek csak akkor róhatók ki, ha e nyalábok globális trivializálhatósága mellett bármely két globális bázismező egymással homotóp.

[9]-ben tisztáztuk a fenti globális topológiai problémákat, és megmutattuk, hogy a fenti bázisnyalábok mindig triviálisak; továbbá hogy gömbi topológiájú \mathcal{S} felület esetén bármely két Lorentz bázismező ill. bármely két spinor bázismező homotóp egymással. Ugyanakkor g genuszú felületen pontosan 2^{2g} számú homotópiusan inekvivalens Lorentz bázismező adható meg, és hogy természetes 1–1 megfeleltetés van e homotópiaosztályok és az \mathcal{S} -en bevezethető inekvivalens $SL(2, \mathbb{C})$ spinorstruktúrák között.

- [9] L. B. Szabados, On some global problems in the tetrad approach of quasi-local quantities, arXiv: 0712.0085 [gr-qc]

Még publikálatlan eredmények

Bizonyos gravitációelméleti problémákban szükség van egy “természetes” gauge-rögzítésre, amit pl. egy három dimenziós térszerű hiperfelületen a Witten egyenlet *mindenütt nemzérus* megoldásai értelmeznek. James Nesterrel és Jörg Frauendienerrel közösen meghatároztuk a maximális, konformisan sík, peremes térszerű hiperfelületeken a Witten egyenlethez szükséges azon peremfeltételek egy nagy osztályát, amelyek biztosítják a megoldások zérushelymentességét.

- [10] J. Frauendiener, J. M. Nester, L. B. Szabados, Witten spinors on maximal, conformally flat hypersurfaces, (preparálás alatt)

Fontosabb előadások

1.

The Poincaré structure and the centre-of-mass of asymptotically flat spacetimes,
(Meghívott plenáris előadás a “Mathematical Relativity: New Idas and Developments” c. 319. WE-Heraeus Szemináriumon, Bad Honnef, Németország, 2004. márc. 1–5.)

2.

Quasi-local holography of linear zero-rest-mass fields in Minkowski spacetime,
(A2 szekció: “Complex Methods Spinors, Twistors and Connection Variables”, “GR 17 International Conference on General Relativity and Gravitation”, Dublin, 2004 Julius 18–23)

3. Quasi-local holography and quasi-local mass of classical fields in Minkowski spacetime,
(Max-Planck Institute für Gravitationsphysik, The Albert Einstein Institute, Golm, 2005 május)

4.

- Quasi-local holography and quasi-local mass: I. Matter fields,
- Quasi-local holography and quasi-local mass: II. Gravity,

(Meghívott plenáris előadások a “Workshop on quasilocal mass” c. rendezvényen, Morningside Mathematical Center, Peking, 2005 Julius)

5.

On a class of 2-surface observables in canonical GR,
(National Central University, Chungli, Tajvan, 2006 november)

6.

The role of Chern–Simons functional in the dynamics of canonical vacuum GR,
(National Cheng Kung University, Tainan, Tajvan, 2006 november; és Academia Sinica, Taipei, Tajvan, 2006 november)

7.

- 2-surfaces observables from Dirac eigenspinors,
(A2 szekció: “Complex Methods Spinors, Twistors and Connection Variables”); és
- Towards the quasi-localization of canonical GR,
(A3 szekció: “Mathematical Study of the Field Equations”, “GR 18 International Conference on General Relativity and Gravitation”, Sydney, 2007 Julius)